令和６年度入試（令和５年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜（前期日程）
学部学科等	理学部（数学）・医学部・薬学部
教科・科目名	数学
正解・解答例又は出題（面接）意図	（解答例） 別紙のとおり
備　　考	

【理学部（数学）・医学部・薬学部　解答例（略解）】

$\boxed{\mathbf{1}}$　(1) $t>0$ において

$$\begin{aligned}
F'(t) &= \frac{1}{2}(t^2+t)^{-\frac{1}{2}}(2t+1)+\frac{1}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t+1}}-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\\
&= \frac{2t+1}{2\sqrt{t^2+t}}+\frac{1}{\sqrt{t+1}-\sqrt{t}}\frac{\sqrt{t}-\sqrt{t+1}}{2\sqrt{t}\sqrt{t+1}}\\
&= \frac{2t+1}{2\sqrt{t^2+t}}-\frac{1}{2\sqrt{t^2+t}}\\
&= \frac{t}{\sqrt{t^2+t}}\\
&= \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t+1}}
\end{aligned}$$

である。したがって

$$\{F'(t)\}^2=\frac{t}{t+1}$$

である。

(2)(a) 2 次方程式 $s^2-xs+y=0$ が実数解 $s=a,b$ を持つので，その判別式 x^2-4y は 0 以上である。したがって

$$y \leqq \frac{x^2}{4}$$

が成り立つ。一方，$a^2+b^2 \leqq 1$ であり

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=x^2-2y$$

であるから，$x^2-2y \leqq 1$ すなわち

$$y \geqq \frac{x^2-1}{2}$$

である。また，$a \geqq 0,\ b \geqq 0$ であるから

$$x \geqq 0, \quad y \geqq 0$$

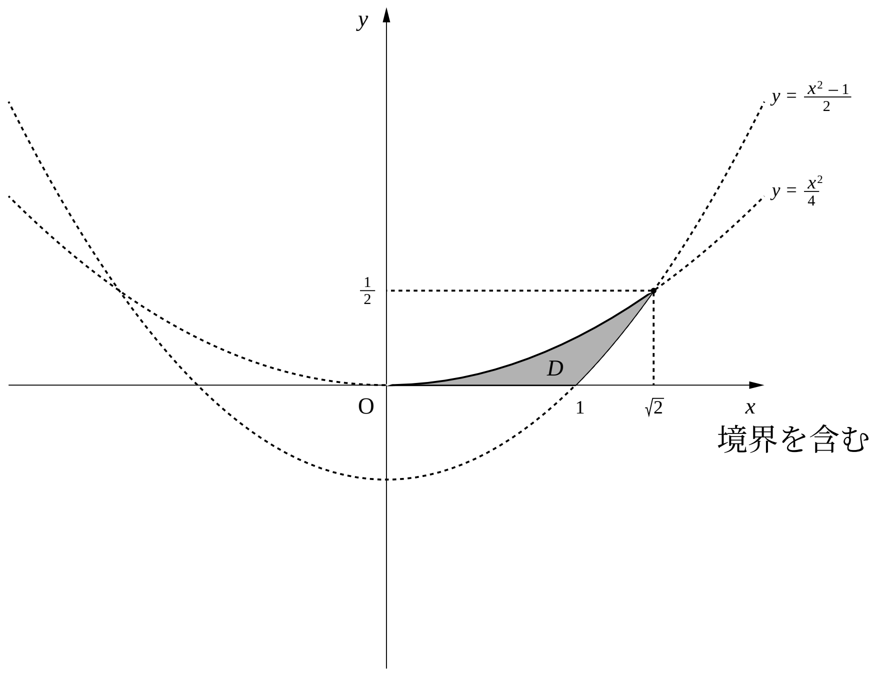
である。以上より x,y は

$$\frac{x^2-1}{2} \leqq y \leqq \frac{x^2}{4},\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

を満たす。逆にこれらを満たす x,y に対して，2 次方程式 $s^2-xs+y=0$ の解 $s=a,b$ は，$x=a+b, y=ab$ かつ $a \geqq 0, b \geqq 0, a^2+b^2 \leqq 1$ を満たす。したがって求める D は，連立不等式

$$\frac{x^2-1}{2} \leqq y \leqq \frac{x^2}{4},\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

の表す領域である。



(b) $\dfrac{1}{16} \leqq t \leqq \dfrac{1}{6}$ とする。$y = t$ と D の共有点 (x, t) は

$$x \geqq 0, \quad \frac{x^2 - 1}{2} \leqq t \leqq \frac{x^2}{4}$$

を満たす。逆にこれらを満たす x, t に対し，点 (x, t) は $y = t$ と D の共有点である。これを x について整理して

$$2\sqrt{t} \leqq x \leqq \sqrt{2t + 1}$$

となるので

$$f(t) = 2\sqrt{t}, \quad g(t) = \sqrt{2t + 1}$$

である。したがって

$$\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{6}} \frac{f(t)}{g(t)} dt = \int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{6}} \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{2t + 1}} dt$$

である。$u = 2t$ とすると

t	$\frac{1}{16} \to \frac{1}{6}$
u	$\frac{1}{8} \to \frac{1}{3}$

$du = 2dt$ であるから，(1) の関数 $F(t)$ を用いて

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{6}} \frac{f(t)}{g(t)} dt &= \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{3}} \frac{2\sqrt{\frac{u}{2}}}{\sqrt{u+1}} \frac{du}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{3}} \sqrt{\frac{u}{u+1}} du \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{3}} F'(u) du \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \Big[F(u) \Big]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{3}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ F(\frac{1}{3}) - F(\frac{1}{8}) \right\}
\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
F(\frac{1}{3}) &= \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3}} + \log \left(\sqrt{\frac{4}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}} \right) \\
&= \frac{2}{3} + \log \left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\
&= \frac{2}{3} + \log \frac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

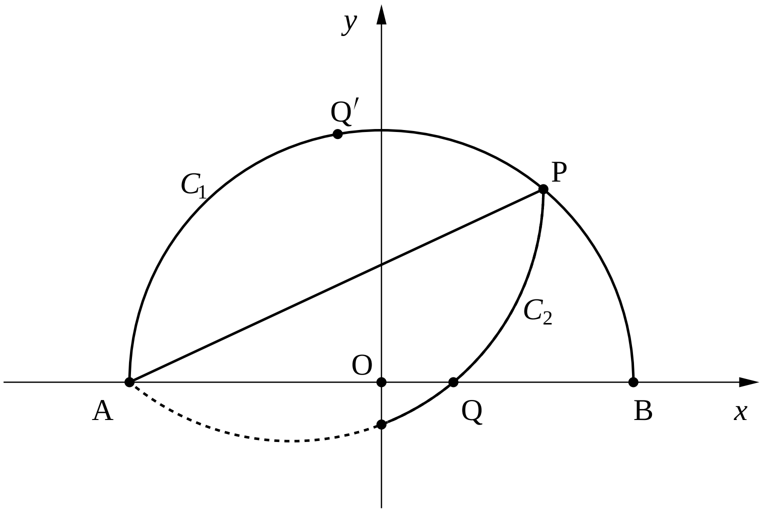
$$\begin{aligned}
F(\frac{1}{8}) &= \sqrt{\frac{1}{8} \cdot \frac{9}{8}} + \log \left(\sqrt{\frac{9}{8}} - \sqrt{\frac{1}{8}} \right) \\
&= \frac{3}{8} + \log \left(\frac{3}{\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}} \right) \\
&= \frac{3}{8} + \log \frac{2}{\sqrt{8}} \\
&= \frac{3}{8} + \log \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{16}}^{\frac{1}{6}} \frac{f(t)}{g(t)} dt &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \left(\frac{2}{3} + \log \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \left(\frac{3}{8} + \log \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{7}{24} + \log \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{7}{24} + \frac{1}{2} \log \frac{2}{3} \right)
\end{aligned}$$

である。

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1)



点 Q の折り返す前の点を Q′ とおく。対称性より $\mathrm{AQ} = \mathrm{AQ}', \angle\mathrm{Q'AP} = \angle\mathrm{QAP}$ なので，$\angle\mathrm{BAQ'} = 2\theta$ である。$\triangle\mathrm{ABQ'}$ を考えると，円周角の定理より $\angle\mathrm{AQ'B}$ が直角なので

$$\mathrm{AQ'} = \mathrm{AB}\cos\angle\mathrm{BAQ'}$$

であり，$\mathrm{AB} = 2, \angle\mathrm{BAQ'} = 2\theta$ より

$$\mathrm{AQ} = \mathrm{AQ'} = 2\cos 2\theta$$

である。

(2) 線分 AP，線分 AQ および曲線 C_2 で囲まれた部分を，直線 AP に関して折り返すと，線分 AP，線分 AQ′ および曲線 C_1 で囲まれた部分にうつされる。したがって

$$\begin{aligned} f(\theta) &= (\triangle\mathrm{APQ'}\text{の面積}) + (\text{線分 PQ}'\text{と弧 PQ}'\text{で囲まれた部分の面積}) \\ &= (\triangle\mathrm{APQ'}\text{の面積}) + (\text{扇形 OPQ}'\text{の面積}) - (\triangle\mathrm{OPQ'}\text{の面積}) \end{aligned}$$

である。

$$(\triangle\mathrm{APQ'}\text{の面積}) = \frac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ'}\cdot\sin\angle\mathrm{Q'AP}$$

である。ここで，円周角の定理から，$\angle\mathrm{APB}$ は直角なので，$\mathrm{AP} = \mathrm{AB}\cos\theta = 2\cos\theta$ である。(1) より，$\mathrm{AQ'} = 2\cos 2\theta$，$\angle\mathrm{Q'AP} = \theta$ であるから

$$\begin{aligned} (\triangle\mathrm{APQ'}\text{の面積}) &= \frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot 2\cos 2\theta\cdot\sin\theta \\ &= 2\sin\theta\cos\theta\cos 2\theta \\ &= \sin 2\theta\cos 2\theta \\ &= \frac{1}{2}\sin 4\theta \end{aligned}$$

である。弧 $\mathrm{Q'P}$ に対する円周角 $\angle\mathrm{PAQ'}$ は θ であるから，中心角 $\angle\mathrm{POQ'}$ は 2θ となるので

$$(\text{扇形 OPQ}'\text{の面積}) = (\text{単位円の面積}) \times \frac{2\theta}{2\pi} = \theta$$

である。また

$$(\triangle\mathrm{OPQ}'\text{の面積}) = \frac{1}{2}\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}'\sin\angle\mathrm{POQ}' = \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

である。したがって

$$f(\theta) \;=\; \frac{1}{2}\sin 4\theta + \theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

である。

(3) 対称性より，P と Q を結ぶ C_2 の曲線の長さは，P と $\mathrm{Q'}$ を結ぶ C_1 の曲線の長さに等しいので

$$\begin{aligned}
g(\theta) &= \mathrm{BQ} + (\text{P と Q を結ぶ } C_2 \text{の曲線の長さ}) + (\text{弧 BP の長さ}) \\
&= \mathrm{BQ} + (\text{P と Q}' \text{ を結ぶ } C_1 \text{の曲線の長さ}) + (\text{弧 BP の長さ}) \\
&= (2 - 2\cos 2\theta) + 2\theta + 2\theta \\
&= 4(\sin^2\theta + \theta)
\end{aligned}$$

である。

(4) (2) と (3) より

$$\begin{aligned}
\frac{f(\theta)}{g(\theta)} &= \frac{\frac{1}{2}(\sin 4\theta - \sin 2\theta) + \theta}{4(\sin^2\theta + \theta)} \\
&= \frac{\sin 4\theta - \sin 2\theta + 2\theta}{8(\sin^2\theta + \theta)} \\
&= \frac{4\cdot\dfrac{\sin 4\theta}{4\theta} - 2\cdot\dfrac{\sin 2\theta}{2\theta} + 2}{8\left(\dfrac{\sin\theta}{\theta}\cdot\sin\theta + 1\right)}
\end{aligned}$$

である。ここで，$\theta \to 0$ のとき $\dfrac{\sin\theta}{\theta} \to 1$ であるから

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{f(\theta)}{g(\theta)} = \frac{4\times 1 - 2\times 1 + 2}{8(1\times 0 + 1)} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

である。

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) 1から2024までの整数について，2^k の倍数の個数を p_k とするとき，2^k の倍数であるが 2^{k+1} の倍数でない整数の個数は $p_k - p_{k+1}$ である。よって，2024! の素因数 2 の個数は，m を $p_{m+1} = 0$ となるような最小の自然数とすると

$$\begin{aligned}&1 \times (p_1 - p_2) + 2 \times (p_2 - p_3) + 3 \times (p_3 - p_4) + \cdots + m \times (p_m - p_{m+1}) \\ &\qquad = \ p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_m\end{aligned}$$

である。p_k は 2024 を 2^k で割ったときの商に等しい。$p_1, p_2, \cdots$ を順に求めると

$$\begin{aligned}p_1 &= 1012 \\ p_2 &= 506 \\ p_3 &= 253 \\ p_4 &= 126 \\ p_5 &= 63 \\ p_6 &= 31 \\ p_7 &= 15 \\ p_8 &= 7 \\ p_9 &= 3 \\ p_{10} &= 1 \\ p_{11} &= 0\end{aligned}$$

となる。したがって，2024! の素因数 2 の個数は

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{10} = 1012 + 506 + 253 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 2017$$

である。よって求める n の値（$\dfrac{2024!}{2^n}$ が整数となる最大の n の値）は 2017 である。

(2) $m = 2024$ とすると $m! = 2024!$ の素因数 2 の個数は (2) より 2017 なので，$\dfrac{2024!}{2^{2024}}$ は整数でない。したがって，条件を満たす m は $m > 2024$ であり，$m!$ の素因数 2 の個数は，2024! の素因数 2 の個数 2017 に加えてあと 7 つは必要である。
そこで，2025 以上の整数について，小さいものから順に $2^k (k = 1, 2, 3, 4)$ の倍数であるか否かを調べると次の表を得る。

m	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032
2 の倍数である	×	○	×	○	×	○	×	○
2^2 の倍数である	×	×	×	○	×	×	×	○
2^3 の倍数である	×	×	×	×	×	×	×	○
2^4 の倍数である	×	×	×	×	×	×	×	○

また，これらの数（2025～2032）はすべて，$2^k (k \geqq 5)$ の倍数でない。上の表より，2031! は素因数 2 を 2021 個もち，2032! は素因数 2 を 2025 個もつことがわかるので，求める m の値（$\dfrac{m!}{2^{2024}}$ が整数となる最小の m の値）は 2032 である。