令和６年度入試（令和５年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜（前期日程）
学部学科等	教育学部・経済学部
教科・科目名	数学
正解・解答例 又は出題 （面接）意図	（解答例） 別紙のとおり
備考	

【教育学部・経済学部　解答例（略解）】

$\boxed{\mathbf{1}}$　$f(x) = x^2 - 2x$ を微分すると，$f'(x) = 2x - 2$ である。直線 ℓ_1 は曲線 C の点 $\mathrm{P}(-1, f(-1))$ における接線であるから，ℓ_1 の方程式は，$f(-1) = 3, f'(-1) = -4$ より，$y - 3 = -4(x - (-1))$，すなわち

$$\ell_1 : y = -4x - 1$$

である。
同様に ℓ_2 の方程式は，$y - 0 = -2(x - 0)$，すなわち

$$\ell_2 : y = -2x$$

であり，ℓ_3 の方程式は，$y - 0 = 2(x - 2)$，すなわち

$$\ell_3 : y = 2x - 4$$

である。
ℓ_1 と ℓ_2 の交点 A は

$$\begin{cases} y = -4x - 1 \\ y = -2x \end{cases}$$

より $\mathrm{A}(-\dfrac{1}{2}, 1)$ である。
ℓ_2 と ℓ_3 の交点 B は

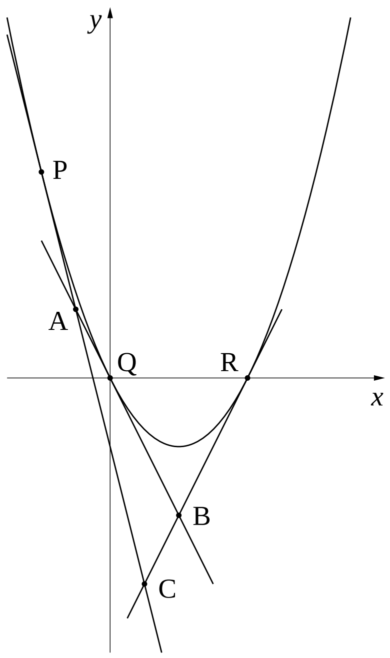
$$\begin{cases} y = -2x \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

より $\mathrm{B}(1, -2)$ である。
ℓ_1 と ℓ_3 の交点 C は

$$\begin{cases} y = -4x - 1 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$$

より $\mathrm{C}(\dfrac{1}{2}, -3)$ である。
したがって，求める $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \{-2x - (-4x - 1)\}dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \{-2x - (2x - 4)\}dx \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (2x + 1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} (-4x + 4)dx \\ &= \Big[x^2 + x\Big]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + \Big[-2x^2 + 4x\Big]_{\frac{1}{2}}^{1} \\ &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(-2 + 4 + \frac{1}{2} - 2\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$



y
P
A
Q
R
x
B
C

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1)

$$\begin{aligned} f(x) &= 8^{x+1}+8^{-x+1}-3(4^{x+2}+4^{-x+2})+3(2^{x+5}+2^{-x+5}) \\ &= 8\cdot(2^3)^x+8\cdot(2^3)^{-x}-3\{4^2\cdot(2^2)^x+4^2\cdot(2^2)^{-x}\}+3(2^5\cdot 2^x+2^5\cdot 2^{-x}) \\ &= 8\{(2^x)^3+(2^{-x})^3\}-48\{(2^x)^2+(2^{-x})^2\}+96(2^x+2^{-x}) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} t^2 &= (2^x+2^{-x})^2 \\ &= (2^x)^2+2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}+(2^{-x})^2 \\ &= (2^x)^2+2+(2^{-x})^2 \end{aligned}$$

より

$$(2^x)^2+(2^{-x})^2=t^2-2$$

である。また

$$\begin{aligned} t^3 &= (2^x+2^{-x})^3 \\ &= (2^x)^3+3\cdot(2^x)^2\cdot 2^{-x}+3\cdot 2^x\cdot(2^{-x})^2+(2^{-x})^3 \\ &= (2^x)^3+3(2^x+2^{-x})+(2^{-x})^3 \end{aligned}$$

より

$$(2^x)^3+(2^{-x})^3=t^3-3t$$

である。したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= 8(t^3-3t)-48(t^2-2)+96t \\ &= 8t^3-48t^2+72t+96 \end{aligned}$$

である。

(2) x が実数全体を動くとき，相加相乗平均より

$$t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$$

が成り立つ。逆に $t\geqq 2$ である t に対して，$2^x+2^{-x}=t$ を満たす x は

$$x=\log_2\frac{t\pm\sqrt{t^2-4}}{2}$$

である。したがって x が実数全体を動くとき，$t=2^x+2^{-x}$ は 2 以上のすべての実数に値をとる。
(1) で得られた t の関数を $g(t)$ とおく：

$$g(t)=8t^3-48t^2+72t+96$$

$g(t)$ の $t\geqq 2$ での増減を調べる。

$$g'(t)=24t^2-96t+72=24(t^2-4t+3)=24(t-1)(t-3)$$

であるから，$g(t)$ の増減表は次のようになる。

t	2	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$	112	$\searrow$	極小 96	$\nearrow$

したがって $g(t)$ は $t=3$ のとき最小値 $g(3)=96$ をとる。
$2^x+2^{-x}=t=3$ となる x は

$$(2^x)^2-3\cdot 2^x+1=0$$

を解いて

$$2^x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

したがって

$$x=\log_2\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}=\log_2(3\pm\sqrt{5})-1$$

である。
故に，$f(x)$ は $x=\log_2(3\pm\sqrt{5})-1$ のとき最小値 96 をとる。

$\boxed{\mathbf{3}}$　(1) 1 から 10 までの整数について，2 の倍数は，$2, 4, 6, 8, 10$ の 5 個であり，2^2 の倍数は，$4, 8$ の 2 個，2^3 の倍数は，8 のみであり，$2^k(k \geqq 4)$ の倍数はない。よって，10! の素因数 2 の個数は

$$1 \times (5-2) + 2 \times (2-1) + 3 \times 1 = 8$$

である。したがって，求める n の値（$\dfrac{10!}{2^n}$ が整数となる最大の n の値）は 8 である。

(2) 1 から 2024 までの整数について，2^k の倍数の個数を p_k とするとき，2^k の倍数であるが 2^{k+1} の倍数でない整数の個数は $p_k - p_{k+1}$ である。よって，2024! の素因数 2 の個数は，m を $p_{m+1} = 0$ となるような最小の自然数とすると

$$\begin{aligned} &1 \times (p_1 - p_2) + 2 \times (p_2 - p_3) + 3 \times (p_3 - p_4) + \cdots + m \times (p_m - p_{m+1}) \\ &= \ p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_m \end{aligned}$$

である。p_k は 2024 を 2^k で割ったときの商に等しい。$p_1, p_2, \cdots$ を順に求めると

$$\begin{aligned} p_1 &= 1012 \\ p_2 &= 506 \\ p_3 &= 253 \\ p_4 &= 126 \\ p_5 &= 63 \\ p_6 &= 31 \\ p_7 &= 15 \\ p_8 &= 7 \\ p_9 &= 3 \\ p_{10} &= 1 \\ p_{11} &= 0 \end{aligned}$$

となる。したがって，2024! の素因数 2 の個数は

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_{10} = 1012 + 506 + 253 + 126 + 63 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 = 2017$$

である。よって求める n の値（$\dfrac{2024!}{2^n}$ が整数となる最大の n の値）は 2017 である。

(3) $m = 2024$ とすると $m! = 2024!$ の素因数 2 の個数は (2) より 2017 なので，$\dfrac{2024!}{2^{2024}}$ は整数でない。したがって，条件を満たす m は $m > 2024$ であり，$m!$ の素因数 2 の個数は，2024! の素因数 2 の個数 2017 に加えてあと 7 つは必要である。
そこで，2025 以上の整数について，小さいものから順に $2^k(k = 1, 2, 3, 4)$ の倍数であるか否かを調べると次の表を得る。

m	2025	2026	2027	2028	2029	2030	2031	2032
2 の倍数である	×	○	×	○	×	○	×	○
2^2 の倍数である	×	×	×	○	×	×	×	○
2^3 の倍数である	×	×	×	×	×	×	×	○
2^4 の倍数である	×	×	×	×	×	×	×	○

また，これらの数（2025〜2032）はすべて，$2^k(k \geqq 5)$ の倍数でない。上の表より，2031! は素因数 2 を 2021 個もち，2032! は素因数 2 を 2025 個もつことがわかるので，求める m の値（$\dfrac{m!}{2^{2024}}$ が整数となる最小の m の値）は 2032 である。