令和６年度入試（令和５年度実施）の情報開示

解答例について

入試の区分	一般選抜（後期日程）
学部学科等	工学部　工学科電気電子工学・知能情報工学・機械工学コース 都市デザイン学部　都市・交通デザイン学科
教科・科目名	数学／数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数Ａ・数Ｂ
正解・解答例又は出題（面接）意図	（解答例） 別紙のとおり
備考	

$\boxed{1}$

(1) $f(x) = \sin(x^2+x+1)$

$$f'(x) = (2x+1)\cos(x^2+x+1)$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x+1)'\cos(x^2+x+1) + (2x+1)\{\cos(x^2+x+1)\}' \\ &= 2\cos(x^2+x+1) - (2x+1)^2\sin(x^2+x+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2\{\cos(x^2+x+1)\}' - \{(2x+1)^2\}'\sin(x^2+x+1) \\ &\quad - (2x+1)^2\{\sin(x^2+x+1)\}' \\ &= -2(2x+1)\sin(x^2+x+1) - 4(2x+1)\sin(x^2+x+1) \\ &\quad - (2x+1)^3\cos(x^2+x+1) \\ &= -6(2x+1)\sin(x^2+x+1) - (2x+1)^3\cos(x^2+x+1) \end{aligned}$$

(2) 部分分数に分解すると，$g(x) = \dfrac{x+4}{(x-3)(2x+1)} = \dfrac{a}{x-3} + \dfrac{b}{2x+1}$

両辺の分子を比べて，恒等式になれば良いから

$a = 1$，$b = -1$

$$g(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{2x+1} = (x-3)^{-1} - (2x+1)^{-1}$$

$$g'(x) = (-1)(x-3)^{-2} - (-1)2(2x+1)^{-2}$$

$$g''(x) = (-1)(-2)(x-3)^{-3} - (-1)(-2)2^2(2x+1)^{-3}$$

$$\vdots$$

$$g^{(n)}(x) = (-1)^n n!\{(x-3)^{-n-1} - 2^n(2x+1)^{-n-1}\} \cdots ①$$

と推測できる。

(i) $n=1$ のとき，$g'(x) = (-1)\{(x-3)^{-2} - 2(2x+1)^{-2}\}$ より，①は成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$g^{(k)}(x) = (-1)^k k!\{(x-3)^{-k-1} - 2^k(2x+1)^{-k-1}\}$$

これを x で微分すると

$$\begin{aligned} g^{(k+1)}(x) &= (-1)^k k!\{(-k-1)(x-3)^{-k-2} - 2^k(-k-1)2(2x+1)^{-k-2}\} \\ &= (-1)^{(k+1)}(k+1)!\{(x-3)^{-(k+1)-1} - 2^{k+1}(2x+1)^{-(k+1)-1}\} \end{aligned}$$

となり，$n=k+1$ のときにも①が成り立つ。

よって，(i)，(ii) より，1 以上の整数 n について①は成り立つ。
$g^{(n)}(x) = (-1)^n n!\{(x-3)^{-n-1} - 2^n(2x+1)^{-n-1}\}$

(3) $x = 3$ の周りに 1 回転させてできる回転体の切り口は，$y = 4$ を除けばドーナツのような図形である。曲線 $y = 4 - x^2$ 上の点の x 座標は，$x < 0$ のとき $x = -\sqrt{4-y}$，$x \geq 0$ のとき $x = \sqrt{4-y}$ である。
内側と外側の円の半径をそれぞれ r_1，r_2 とすると

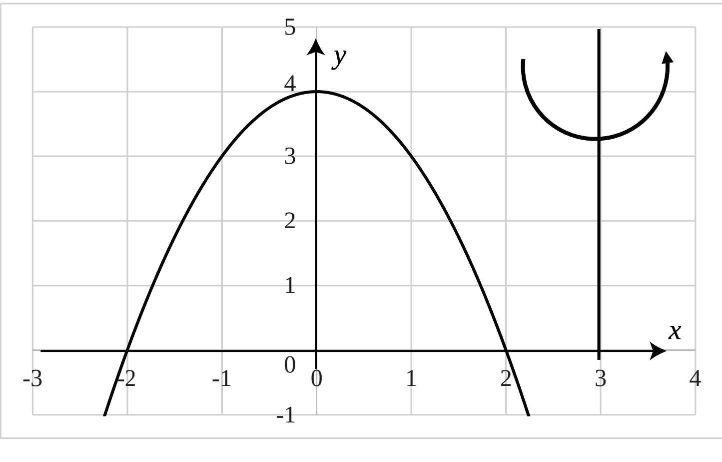
$$r_1 = 3 - \sqrt{4-y}, \qquad r_2 = 3 + \sqrt{4-y}$$

それぞれの切り口の面積を S_1，S_2 とすると

$$S_1 = \pi r_1^2 = \pi\left(3 - \sqrt{4-y}\right)^2, \qquad S_2 = \pi r_2^2 = \pi\left(3 + \sqrt{4-y}\right)^2$$

よって，求める回転体の体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \int_0^4 (S_2 - S_1)dy \\
&= \pi\int_0^4 \left\{\left(3+\sqrt{4-y}\right)^2 - \left(3-\sqrt{4-y}\right)^2\right\}dy \\
&= \pi\int_0^4 \left(12\sqrt{4-y}\right)dy = 12\pi\int_0^4 (4-y)^{\frac{1}{2}}\,dy \\
&= 12\pi\left[-\frac{2}{3}(4-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = -8\pi\left[(4-y)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 \\
&= -8\pi\left(0 - 4^{\frac{3}{2}}\right) = 64\pi
\end{aligned}$$



$\boxed{2}$

題意より，$z^3-8=(z-2)(z^2+2z+4)=0$

$z=2,-1+\sqrt{3}i,-1-\sqrt{3}i$

となり，これより，

$\alpha=-1+\sqrt{3}i, \beta=-1-\sqrt{3}i$

である。なお，i は虚数単位である。

(1) $|\alpha|=\sqrt{(-1)^2+\sqrt{3}^2}=2$

$|\beta|=\sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2}=2$

$|\alpha^2|=|-2-2\sqrt{3}i|=\sqrt{(-2)^2+(-2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=4$

$|\beta-\alpha|=|-2\sqrt{3}i|=2\sqrt{3}$

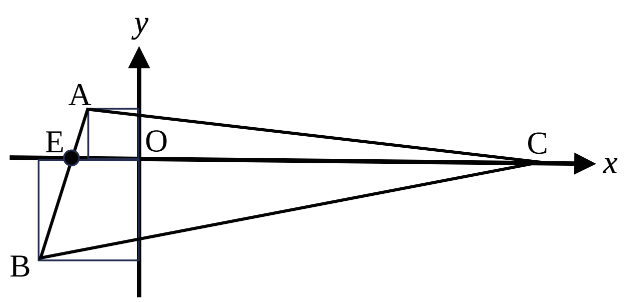
(2) $\alpha=-1+\sqrt{3}i, \alpha^2=-2-2\sqrt{3}i, \alpha^3=8$ である。

下図に複素数平面上の三角形 ABC を示す。x 軸は実軸，y 軸は虚軸を表す。辺 AB と実軸との交点を E とする。

点 E の x 座標は $-\dfrac{4}{3}$

三角形 AEC の面積は $\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{4}{3}+8\right)\times\sqrt{3}=\dfrac{14\sqrt{3}}{3}$

三角形 BEC の面積は三角形 AEC の面積の 2 倍である。三角形 ABC の面積は三角形 AEC の面積の 3 倍であるから，三角形 ABC の面積は $14\sqrt{3}$



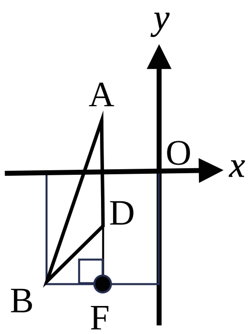
(3) $|\alpha^2-\alpha|=|-1-3\sqrt{3}i|=\sqrt{(-1)^2+(-3\sqrt{3})^2}=\sqrt{28}=2\sqrt{7}$

(4) 点 B から y 軸に下ろした垂線と線分 AD の延長線上で交わる点を F とするとき，

三角形 ABF について考える。

前題より $|\mathrm{AB}|=2\sqrt{7},\ \ |\mathrm{AF}|=\sqrt{3}+2\sqrt{3}=3\sqrt{3}$

$$\cos\theta=\frac{|\mathrm{AF}|}{|\mathrm{AB}|}=\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{3}\cdot\sqrt{7}}{2\sqrt{7}\cdot\sqrt{7}}=\frac{3}{14}\sqrt{21}$$



$\boxed{3}$

計算カードと数値カードの対応表は以下の通り

	$\log_2 x$	$\log_4 x$	$\log_8 x$	$\log_2 \frac{1}{x}$	$\log_4 \frac{1}{x}$	$\log_8 \frac{1}{x}$
1	0	0	0	0	0	0
2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$
4	2	1	$\frac{2}{3}$	-2	-1	$-\frac{2}{3}$
8	3	$\frac{3}{2}$	1	-3	$-\frac{3}{2}$	-1

起こり得る a の場合の数は，全部で $6\times4=24$ 通りである。

起こり得る a と b の場合の数は，全部で $(6\times4)\times(5\times3)=24\times15=360$ 通りである。

(1) a が整数となるのは，上記の対応表に示すように，-3 が 1 通り，-2 が 1 通り，-1 が 3 通り，0 が 6 通り，1 が 3 通り，2 が 1 通り，3 が 1 通りの合計 16 通りである。よって求める確率は $\dfrac{16}{24}=\dfrac{2}{3}$

(2) 最も多く現れる a の値は 0 である。また，0 の現れる確率は $\dfrac{6}{24}=\dfrac{1}{4}$

(3) $a\div b=1$ となるのは，まず 0 以外の同じ数値が表内に 2 個所以上あることであり，その組み合わせは

$$(a,b)=(-1,-1),(1,1)$$

2 度目に取り出したカードは戻さないことから，表内で a と b が同じ行または同じ列内にないことに注意し

$(a,b)=(-1,-1)$ のとき，$2+2+2=6$ 通り

$(a,b)=(1,1)$ のとき，$2+2+2=6$ 通り

よって，$a\div b=1$ となる確率は

$$\frac{6+6}{360}=\frac{12}{360}=\frac{1}{30}$$

(4) $a-b=1$ となる組み合わせは，

$$(a,b)=(-2,-3),(-1,-2),(0,-1),(1,0),(2,1),(3,2),$$
$$\left(-\frac{1}{2},-\frac{3}{2}\right),\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right),\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

表内で a と b が同じ行または同じ列内にないことに注意して，適するのは

$$(a,b)=(-1,-2),(0,-1),(1,0),(2,1),\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3}\right),\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

$(a,b)=(-1,-2)$ のとき，1 通り

$(a,b)=(0,-1)$ のとき，$3+3+3+2+2+2=15$ 通り

$(a,b)=(1,0)$ のとき，$5+5+5=15$ 通り

$(a,b)=(2,1)$ のとき，1 通り

$(a,b)=\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$ のとき，1 通り

$(a,b)=\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ のとき，1 通り

よって，$a-b=1$ となる確率は

$$\frac{1+15+15+1+1+1}{360}=\frac{34}{360}=\frac{17}{180}$$