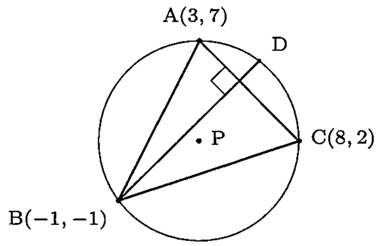
令和６年度入試（令和５年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜（後期日程）
学部学科等	理学部
教科・科目名	数学
正解・解答例又は出題（面接）意図	（解答例） 別紙のとおり
備考	

$\boxed{1}$ (1) $\triangle$ABC の外接円の中心 P の座標を (a, b) とし，半径を r とする．このとき外接円の方程式は $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ となる．A, B, C はこの円上の点であるから



$$\begin{cases} (3-a)^2+(7-b)^2=r^2 & \cdots\cdots \ ① \\ (-1-a)^2+(-1-b)^2=r^2 & \cdots\cdots \ ② \\ (8-a)^2+(2-b)^2=r^2 & \cdots\cdots \ ③ \end{cases}$$

①－② を計算すれば，$-8a-16b+56=0$. 故に $a+2b=7$ $\cdots\cdots$ ④．また，②－③ を計算すれば，$18a+6b-66=0$. 故に $3a+b=11$ $\cdots\cdots$ ⑤．連立方程式 ④, ⑤ を解くと $a=3$, $b=2$. これを ① に代入して $5^2=r^2$ となるが，$r>0$ なので，$r=5$ でなければならない．

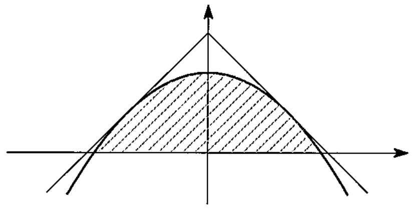
答え： 外接円の中心の座標は $(3, 2)$，半径は 5.

(2) 直線 AC の傾きは $\dfrac{2-7}{8-3}=-1$ であり，点 A(3, 7) を通るので，その方程式は $y=10-x$ となる．他方，直線 BD と直線 AC は直交するので，直線 BD の傾きを S とすれば，$(-1)S=-1$ となり，$S=1$. すなわち，直線 BD は $B(-1,-1)$ を通る傾き 1 の直線である．よってその方程式は $y=x$ となる．D の座標を (α, β) とすれば，$(\alpha-3)^2+(\beta-2)^2=5^2$ かつ $\alpha=\beta$ となる．故に $2\alpha^2-10\alpha+13=25$. これを解いて，$\alpha=-1$ または $\alpha=6$. D は B とは異なる点であるから，$\alpha=\beta=6$ でなければならない．つまり D の座標は $(6, 6)$ である．従って，線分 BD の長さ $\overline{\mathrm{BD}}$ は

$$\overline{\mathrm{BD}}=\sqrt{(6-(-1))^2+(6-(-1))^2}=\sqrt{7^2\cdot 2}=7\sqrt{2}$$

答え： 線分 BD の長さは $7\sqrt{2}$

$\boxed{2}$ (1) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ は y 軸に関して線対称であるから，これらが 2 点で接することは，$x<0$ の範囲で 1 点で接することと同値である．



$f'(x)=-2bx$ であるので，$y=f(x)$ の点 $(t, a-bt^2)$ における接線の方程式は，

$$y=f'(t)(x-t)+f(t)=-2bt(x-t)+a-bt^2=-2btx+2bt^2+a-bt^2$$

となる．$x<0$ の範囲でこの接線と $y=g(x)$ が一致することと，$-2bt=1$ かつ $2bt^2+a-bt^2=1$ であることは同値である．この 2 式から t を消去すれば，$1+4ba=4b$．すなわち

$$b=\frac{1}{4(1-a)} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

逆に①が成り立つとき，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は $x<0$ の範囲において 1 点で接する．x の範囲を限定しなければ，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ は 2 点で接する．$y=f(x)$ と x 軸との交点は $\left(-\sqrt{a/b}, 0\right)$，$\left(\sqrt{a/b}, 0\right)$ であるから，①より

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_{-\sqrt{a/b}}^{\sqrt{a/b}} f(x)\,dx = 2\int_0^{\sqrt{a/b}} (a-bx^2)\,dx = 2\left[ax-\frac{bx^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a/b}} \\ &= 2a\sqrt{\frac{a}{b}}-\frac{2}{3}\cdot b\cdot\frac{a}{b}\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{4}{3}a\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{4}{3}a\sqrt{4a(1-a)}=\frac{8}{3}a\sqrt{a(1-a)} \end{aligned}$$

答え：$S(a)=\dfrac{8}{3}a\sqrt{a(1-a)}$

(2) $h(a)=a^3(1-a)\quad(0<a<1)$ と置く．このとき

$$h'(a)=3a^2-4a^3=a^2(3-4a).$$

よって $h(a)$ の増減は次の表のようになる．

a	0		$\frac{3}{4}$		1
$h'(a)$		$+$	0	$-$	
$h(a)$		$\nearrow$	$\frac{3^3}{4^4}$	$\searrow$	

よって，$h(a)$ は $a=\dfrac{3}{4}$ のとき，最大値 $\dfrac{3^3}{4^4}$ を取る．$S(a)=\dfrac{8}{3}\sqrt{h(a)}$ であるから，$S(a)$ は $a=\dfrac{3}{4}$，$b=1$ のとき最大となり，その最大値は

$$\frac{8}{3}\sqrt{\frac{3^3}{4^4}}=\frac{8}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{16}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

答え：$S(a)$ は $a=\dfrac{3}{4}$，$b=1$ のとき最大値 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をとる．

$\boxed{3}$ (1) まず $a \geqq b \geqq c$ の場合に

$$a^2 + b^2 + c^2 = 14 \quad \cdots\cdots \quad ①$$

を満たす a, b, c を求める．$a \geqq 4$ の場合には，$a^2 + b^2 + c^2 > a^2 \geqq 16 > 14$ となってしまうので，①が成り立たない．また $a \leqq 2$ とすれば，$c \leqq b \leqq a \leqq 2$ であるので，$a^2 + b^2 + c^2 \leqq 2^2 + 2^2 + 2^2 = 12 < 14$ となって①が成り立たない．故に $a = 3$．よって $b \leqq a = 3$ でなければならない．$b = 3$ とすれば $a^2 + b^2 + c^2 = 3^2 + 3^2 + c^2 = 18 + c^2 > 14$ となるので①が成り立たない．他方，$b = 1$ とすれば $b = c = 1$ となるので，$a^2 + b^2 + c^2 = 9 + 1 + 1 = 11 < 14$ となって①が成り立たない．故に $b = 2$ であり，$c^2 = 14 - a^2 - b^2 = 14 - 9 - 4 = 1$．従って $a = 3$，$b = 2$，$c = 1$

a, b, c の順序を入れ替えても同様の議論が可能であり，a, b, c のうちで最も大きいものが 3，次に大きいものが 2，最も小さいものが 1 ということになる．

以上の議論より，求める (a, b, c) の組は，

$$(3,2,1), \quad (3,1,2), \quad (2,3,1), \quad (2,1,3), \quad (1,3,2), \quad (1,2,3)$$

の 6 つである．

答え：$(3,2,1)$，$(3,1,2)$，$(2,3,1)$，$(2,1,3)$，$(1,3,2)$，$(1,2,3)$．

(2) x, y, z が奇数の場合と偶数の場合に分けて

$$x^2 + y^2 + z^2 = 56 \quad \cdots\cdots \quad ②$$

が成り立つ条件を考える．まず x，y，z のうち，1 つが奇数で，他の 2 つが偶数の場合を考える．このとき，x^2，y^2，z^2 のうちの 1 つのみが奇数になる．それ故，$x^2 + y^2 + z^2$ が奇数となり，② は成り立たない．また，x，y，z のすべてが奇数のときも $z^2 + y^2 + z^2$ が奇数となり，② が成り立たない．

次に x, y, z のうち 2 つが奇数で，1 つが偶数の場合を考える．2 つ奇数を $2j + 1, 2k + 1$ とし，他の 1 つの偶数を 2ℓ とする．このとき

$$\begin{aligned}(2j+1)^2 + (2k+1)^2 + (2\ell)^2 &= 4j^2 + 4j + 1 + 4k^2 + 4k + 1 + 4\ell^2 \\ &= 4(j^2 + j + k^2 + k + \ell^2) + 2\end{aligned}$$

となり，右辺は 4 の倍数ではない．よってこの場合も②は成り立たない．

以上のことから②が成り立つためには x, y, z のすべてが偶数でなければならない．それらを $2j$，$2k$，2ℓ とすれば，$56 = (2j)^2 + (2k)^2 + (2\ell)^2 = 4(j^2 + k^2 + \ell^2)$．故に $j^2 + k^2 + \ell^2 = 14$．これを満たす (j, k, ℓ) の組は，(1) で求めた 6 つである．よって，求める (x, y, z) の組は $(6,4,2)$，$(6,2,4)$，$(4,6,2)$，$(4,2,6)$，$(2,6,4)$，$(2,4,6)$ の 6 つである．

答え：$(6,4,2)$，$(6,2,4)$，$(4,6,2)$，$(4,2,6)$，$(2,6,4)$，$(2,4,6)$