令和５年度入試（令和４年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜
学部学科等	理学部数学科・医学部・薬学部
教科・科目名	数学／ 数学(全学)
正解・解答例又は出題（面接）意図	(解答例) 別紙に略解を示す。
備考	

— 理学部数学科・医学部・薬学部　解答例（略解）—

$\boxed{1}$

(1)　$-\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{x}{2} < \dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\dfrac{x}{2} \neq 0$ である。よって，次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
\sin x &= 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2} \\
\cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\
\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{\frac{dt}{dx}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2}{1+t^2}
\end{aligned}$$

(2)　置換積分法の公式を用いる。

x と t の対応は右の表のようになる。

x	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
t	0	$\longrightarrow$	1

よって，

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x} &= \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \Big[\log|1+t|\Big]_0^1 = \log 2
\end{aligned}$$

答：　$\log 2$

(3)　置換積分法の公式を用いる。$u = \dfrac{\pi}{2} - x$ とおく。$x = \dfrac{\pi}{2} - u$ であるから，$\dfrac{dx}{du} = -1$ であり，$\sin x = \cos u$，$\cos x = \sin u$ である。

x と u の対応は右の表のようになる。

x	0	$\longrightarrow$	$\frac{\pi}{2}$
u	$\frac{\pi}{2}$	$\longrightarrow$	0

よって，

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{1+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-u\right)}\cdot(-1)du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\cos u}{1+\cos u+\sin u}du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\cos x}{1+\cos x+\sin x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\cos x}{1+\sin x+\cos x}dx
\end{aligned}$$

(4)　$I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx$ とおく。(3) より，次の等式が成り立つ。

$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2+2\sin x+2\cos x}{1+\sin x+\cos x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\,dx = \Big[2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

よって，$I=\dfrac{\pi}{2}$ である。

答：$\dfrac{\pi}{2}$

(5)　(2) と (4) より，次の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+2\sin x}{1+\sin x+\cos x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\log 2\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\log 2\end{aligned}$$

答：$\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{1}{2}\log 2$

$\boxed{2}$

(1) $$f'(x) = -\frac{1}{2}x(x-4)e^{-\frac{x}{2}},\qquad f(4) = \frac{16}{e^2},$$

$$f''(x) = \frac{1}{4}(x^2-8x+8)e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}\{x-(4-2\sqrt{2})\}\{x-(4+2\sqrt{2})\}e^{-\frac{x}{2}}$$

よって，$f(x)$ の増減および凹凸は次の表のようになる。

x	0	$\cdots\cdots$	$4-2\sqrt{2}$	$\cdots\cdots$	4	$\cdots\cdots$	$4+2\sqrt{2}$	$\cdots\cdots$
$f'(x)$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↗	変曲点 α	↗	極大 $\frac{16}{e^2}$	↘	変曲点 β	↘

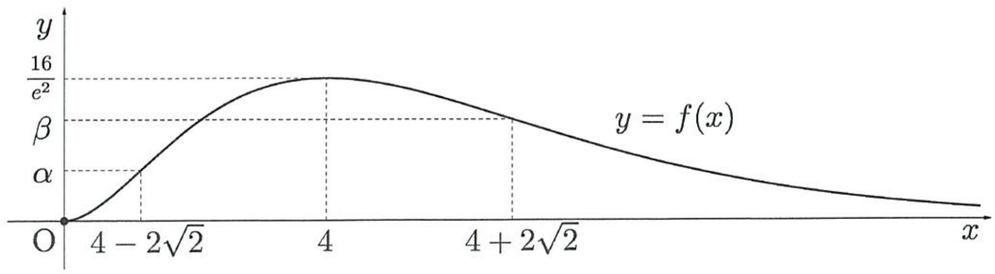
ただし，

$$\begin{aligned}\alpha &= f(4-2\sqrt{2}) = (24-16\sqrt{2})e^{-2+\sqrt{2}}\\ \beta &= f(4+2\sqrt{2}) = (24+16\sqrt{2})e^{-2-\sqrt{2}}\end{aligned}$$

とおいた。

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{(3+2\sqrt{2})e^{-2\sqrt{2}}}{3-2\sqrt{2}} = \frac{17+12\sqrt{2}}{e^{2\sqrt{2}}} > \frac{17+12}{e^3} > \frac{29}{3^3} = \frac{29}{27} > 1$$

よって，$\alpha < \beta$ である。
また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2e^{-\frac{x}{2}} = 0$ である。よって，グラフは次のようになる。



(2) 部分積分法の公式を用いる。

$$\begin{aligned}\int f(x)dx &= x^2(-2e^{-\frac{x}{2}}) - \int 2x(-2e^{-\frac{x}{2}})dx\\ &= -2x^2e^{-\frac{x}{2}} + 4\left\{x(-2e^{-\frac{x}{2}}) - \int(-2e^{-\frac{x}{2}})dx\right\}\\ &= -2x^2e^{-\frac{x}{2}} - 8xe^{-\frac{x}{2}} - 16e^{-\frac{x}{2}} + C\\ &= -2(x^2+4x+8)e^{-\frac{x}{2}} + C\end{aligned}$$

ただし，C は積分定数である。

答： $-2(x^2+4x+8)e^{-\frac{x}{2}}+C$ （C は積分定数）

(3) $S(a)=\int_0^a f(x)dx$ である。(2) より，

$$\begin{aligned} S(a) &= \left[-2(x^2+4x+8)e^{-\frac{x}{2}}\right]_0^a \\ &= 16-2(a^2+4a+8)e^{-\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

答： $16-2(a^2+4a+8)e^{-\frac{a}{2}}$

(4) $\lim_{a\to\infty} e^{-\frac{a}{2}}=0$ であり，題意より，$\lim_{a\to\infty} ae^{-\frac{a}{2}}=0$，$\lim_{a\to\infty} a^2e^{-\frac{a}{2}}=0$ である。
よって，(3) より，$\lim_{a\to\infty} S(a)=16$ である。

答： 16

$\boxed{3}$

(1)

$$z^{3^1} - z^{3^0} = z^3 - z = (z-1)z(z+1)$$

$z-1$，z，$z+1$ は連続する 3 つの整数である。ゆえに，$z-1$，z，$z+1$ のいずれかは 3 の倍数である。

よって，$P(1)$ は真である。

(2)　(1) より，$z^3 - z = 3m$ となる整数 m が存在する。

$$\begin{aligned}(z^3-z)^3 &= (z^3)^3 - 3(z^3)^2 z + 3z^3 z^2 - z^3 \\ &= z^{3\cdot 3} - 3z^{3\cdot 2+1} + 3z^5 - z^3 \\ &= z^9 - 3z^7 + 3z^5 - z^3 \\ &= z^9 - z^3 - 3z^4(z^3 - z)\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}z^{3^2} - z^{3^1} &= z^9 - z^3 \\ &= (3m)^3 + 3z^4 \cdot 3m \\ &= 3^2(3m^3 + z^4 m)\end{aligned}$$

よって，$P(2)$ は真である。

(3)　数学的帰納法を用いて示す。n を自然数とする。

[1]　$n=1$ のとき，(1) より，$P(1)$ は真である。

[2]　$n=k$ のとき，$P(k)$ が真であると仮定する。

$z^{3^k} - z^{3^{k-1}} = 3^k q$ となる整数 q が存在する。

$$\begin{aligned}(z^{3^k} - z^{3^{k-1}})^3 &= (z^{3^k})^3 - 3(z^{3^k})^2 z^{3^{k-1}} + 3z^{3^k}(z^{3^{k-1}})^2 - (z^{3^{k-1}})^3 \\ &= z^{3^k\cdot 3} - 3z^{3^k\cdot 2 + 3^{k-1}} + 3z^{3^k + 3^{k-1}\cdot 2} - z^{3^{k-1}\cdot 3} \\ &= z^{3^{k+1}} - z^{3^k} - 3z^{3^k+3^{k-1}}(z^{3^k} - z^{3^{k-1}})\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}z^{3^{k+1}} - z^{3^k} &= (3^k q)^3 + 3z^{3^k+3^{k-1}} \cdot 3^k q \\ &= 3^{3k} q^3 + 3^{k+1} z^{3^k+3^{k-1}} q \\ &= 3^{k+1}(3^{2k-1} q^3 + z^{3^k+3^{k-1}} q)\end{aligned}$$

k が 1 以上の整数であるから，$2k-1$ および $k-1$ は 0 以上の整数である。

ゆえに，$3^{2k-1}q^3 + z^{3^k+3^{k-1}}q$ は整数である。

以上より，$P(k+1)$ は真である。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について $P(n)$ は真である。