令和５年度入試（令和４年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜
学部学科等	理・工・都市デザイン学部
教科・科目名	数学／ 数学(全学)
正解・解答例又は出題（面接）意図	（解答例） 別紙に略解を示す。
備考	

— 理学部・工学部・都市デザイン学部　解答例（略解）—

$\boxed{1}$

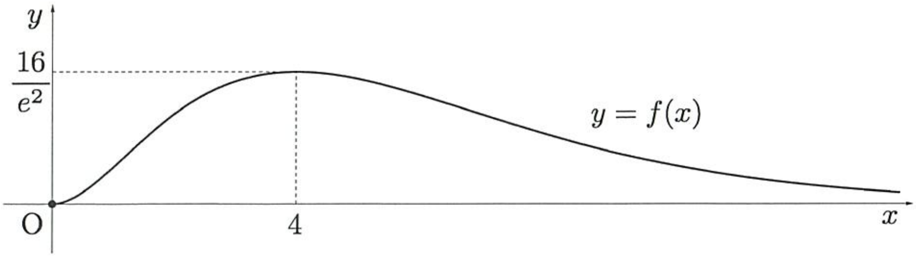
(1)　$f'(x) = -\dfrac{1}{2}x(x-4)e^{-\frac{x}{2}}$，$f(4) = \dfrac{16}{e^2}$

よって，$f(x)$ の増減は次の表のようになる。

x	0	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	↗	極大 $\dfrac{16}{e^2}$	↘

したがって，$f(x)$ は区間 $0 \leqq x \leqq 4$ で増加し，区間 $4 \leqq x$ で減少する。

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-\frac{x}{2}} = 0$ より，$y = f(x)$ のグラフは次のようになる。



(2)　部分積分法の公式を用いる。

$$\begin{aligned}
\int f(x)dx &= x^2(-2e^{-\frac{x}{2}}) - \int 2x(-2e^{-\frac{x}{2}})dx \\
&= -2x^2e^{-\frac{x}{2}} + 4\left\{x(-2e^{-\frac{x}{2}}) - \int(-2e^{-\frac{x}{2}})dx\right\} \\
&= -2x^2e^{-\frac{x}{2}} - 8xe^{-\frac{x}{2}} - 16e^{-\frac{x}{2}} + C \\
&= -2(x^2+4x+8)e^{-\frac{x}{2}} + C
\end{aligned}$$

ただし，C は積分定数である。

答：　$-2(x^2+4x+8)e^{-\frac{x}{2}} + C$　（C は積分定数）

(3)　$S(a) = \displaystyle\int_0^a f(x)dx$ である。(2) より，

$$\begin{aligned}
S(a) &= \Big[-2(x^2+4x+8)e^{-\frac{x}{2}}\Big]_0^a \\
&= 16 - 2(a^2+4a+8)e^{-\frac{a}{2}}
\end{aligned}$$

答：　$16 - 2(a^2+4a+8)e^{-\frac{a}{2}}$

(4)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty} e^{-\frac{a}{2}} = 0$ であり，題意より，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} ae^{-\frac{a}{2}} = 0$，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a^2e^{-\frac{a}{2}} = 0$ である。

よって，(3) より，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} S(a) = 16$ である。

答：　16

$\boxed{2}$

(1)　$\angle$BOL の二等分線と線分 BL の交点を P とする。
点 A も $\angle$BOL の二等分線上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となる実数 k がある。
また，$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}| : |\overrightarrow{\mathrm{PL}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| : |\overrightarrow{\mathrm{OL}}| = 1 : 1$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OL}})$ である。したがって，

$$2k\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OL}} \quad \cdots\cdots \text{①}$$

$2k\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OL}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから，

$$2k\,|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\,|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$$

よって，$k = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。① より，$\sqrt{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OL}}$ である。
これより，$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = \sqrt{3}\,\vec{a} - \vec{b}$ である。

答：　$\sqrt{3}\,\vec{a} - \vec{b}$

(2)　$\angle$COA の二等分線と線分 AC の交点を Q とする。
点 B も $\angle$COA の二等分線上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = m\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる実数 m がある。
また，$|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}| : |\overrightarrow{\mathrm{QC}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}}| : |\overrightarrow{\mathrm{OC}}| = 1 : 1$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})$ である。したがって，

$$2m\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots\cdots \text{②}$$

$2m\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ であるから，

$$2m\,|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\,|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

よって，$m = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。② より，$\sqrt{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ である。
これより，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\vec{a} + \sqrt{3}\,\vec{b}$ である。

答：　$-\vec{a} + \sqrt{3}\,\vec{b}$

(3)　$\angle$DOB の二等分線と線分 DB の交点を R とする。
点 C も $\angle$DOB の二等分線上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = n\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ となる実数 n がある。
また，$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}| : |\overrightarrow{\mathrm{RD}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| : |\overrightarrow{\mathrm{OD}}| = 1 : 1$ であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}})$ である。したがって，

$$2n\,\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} \quad \cdots\cdots \text{③}$$

$2n\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ であるから，

$$2n\,|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 = |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\left(\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\,|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

よって，$n = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。③ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \sqrt{3}\,\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad \cdots\cdots \text{④}$$

(2) と ④ より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = -\sqrt{3}\,\vec{a} + 2\,\vec{b}$ である。

答： $-\sqrt{3}\,\overrightarrow{a}+2\,\overrightarrow{b}$

(4) T を $\triangle$OAB の面積とする。

$$T=\frac{1}{2}|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\frac{\pi}{6}=\frac{|\overrightarrow{a}|^2}{4}=\frac{x^2}{4}$$

S を求める面積とする。

$$S=12T=3x^2$$

答： $3x^2$

$\boxed{3}$

(1) $f(x) = 4x^2 - 14x + 1$，$f'(x) = 8\left(x - \dfrac{7}{4}\right)$

$f(x)$ は区間 $x \leqq \dfrac{7}{4}$ で減少し，区間 $\dfrac{7}{4} \leqq x$ で増加する。また，$1 < \dfrac{7}{4} < 2$ である。
よって，求める m は 1，2 のいずれかであるか，または，その両方である。
$f(1) = -9$，$f(2) = -11$ であるから，$f(1) > f(2)$ である。
よって，答えは次のようになる。

答： 最小値は -11 であり，そのときの m の値は 2

(2) $f'(x) = 2(n+3)x - 2(n^2+3n+3) = 2(n+3)\left\{x - \left(n + \dfrac{3}{n+3}\right)\right\}$

$f(x)$ は区間 $x \leqq n + \dfrac{3}{n+3}$ で減少し，区間 $n + \dfrac{3}{n+3} \leqq x$ で増加する。また，$n < n + \dfrac{3}{n+3} < n+1$ である。よって，求める m は $n, n+1$ のいずれかであるか，または，その両方である。

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= (n+3)\{(n+1)^2 - n^2\} + 2(n^2+3n+3)\{-(n+1)+n\} \\ &= (n+3)(2n+1) - 2(n^2+3n+3) = n - 3 \end{aligned}$$

ゆえに，

$$\begin{cases} f(n) > f(n+1) & (n = 2 \text{ のとき}) \\ f(n) = f(n+1) & (n = 3 \text{ のとき}) \\ f(n) < f(n+1) & (n \geqq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$$

よって，答は次のようになる。

答： $\begin{cases} 3 & (n = 2 \text{ のとき}) \\ 3 \text{ および } 4 & (n = 3 \text{ のとき}) \\ n & (n \geqq 4 \text{ のとき}) \end{cases}$