令和５年度入試（令和４年度実施）の情報開示
解答例について

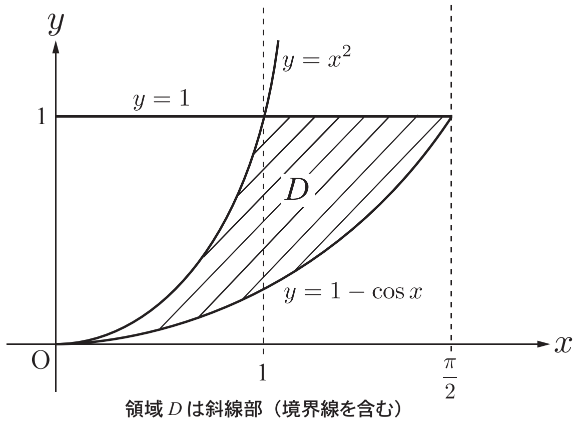
入試の区分	一般選抜（後期日程）
学部学科等	理学部数学科
教科・科目名	数学／ 数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数Ａ・数Ｂ
正解・解答例又は出題（面接）意図	（解答例） 別紙のとおり
備　　考	

略解を示す。

$\boxed{1}$ $f(x)=x^2$, $g(x)=1-\cos x$, $F(x)=f(x)-g(x)$ とおく。

$$F'(x)=2x-\sin x$$
$$F''(x)=2-\cos x>0$$

したがって，$0 \leqq x \leqq \pi/2$ において $F'(x)$ は単調に増加する。$F'(0)=0$ より，$0<x \leqq \pi/2$ において $F'(x)>0$ であるため $0 \leqq x \leqq \pi/2$ において $F(x)$ は単調に増加する。また，$F(0)=0$ より，$0<x \leqq \pi/2$ において $F(x)>0$ となる。よって，$0<x \leqq \pi/2$ において $f(x)>g(x)$ であり，領域 D は図のようになる。



領域 D は斜線部（境界線を含む）

図

y 軸と直線 $y=1$ および $y=f(x)$ で囲まれた領域を y 軸のまわりで回転させてできる回転体の体積を V_1 とすると，

$$\begin{aligned}V_1&=\pi\int_0^1 x^2dy\\&=\pi\int_0^1 ydy\\&=\pi\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1\\&=\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

また，y 軸と直線 $y=1$ および $y=g(x)$ で囲まれた領域を y 軸のまわりで回転させてできる回転体の体積を V_2 とすると，曲線 $y=g(x)$ において y が 0 から 1 まで変わるとき，x は 0 から $\pi/2$ まで変わるので，

$$\begin{aligned}V_2&=\pi\int_0^1 x^2dy\\&=\pi\int_0^{\pi/2} x^2g'(x)dx\\&=\pi\int_0^{\pi/2} x^2\sin xdx\\&=\pi\left\{\left[-x^2\cos x\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}2x\cos xdx\right\}\\&=\pi\left\{\left[2x\sin x\right]_0^{\pi/2}-\int_0^{\pi/2}2\sin xdx\right\}\\&=\pi^2-2\pi\end{aligned}$$

したがって，求める体積 V は $V=V_2-V_1=\pi^2-\dfrac{5}{2}\pi$ である。

$\boxed{2}$

(1)　$z=a+bi$，$w=c+di$ とおく。ただし，a, b, c, d は実数，i は虚数単位とする。

$$\begin{aligned}(|z|+|w|)^2-|z+w|^2&=\left(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\right)^2-\left((a+c)^2+(b+d)^2\right)\\&=2\left(\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}-(ac+bd)\right)\qquad\cdots①\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\right)^2-(ac+bd)^2&=(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(a^2c^2+2abcd+b^2d^2)\\&=a^2d^2+b^2c^2-2abcd\\&=(ad-bc)^2\geqq 0\end{aligned}$$

$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\geqq 0$ より，

$$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2}\geqq|ac+bd|\geqq ac+bd\qquad\cdots②$$

①と② より $(|z|+|w|)^2-|z+w|^2\geqq 0$ である。したがって，$|z|+|w|\geqq 0$ より $|z|+|w|\geqq|z+w|$ が成り立つ。

(2)(a)

$$I=\left|\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\right|$$

とおく。条件より $|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ であるから，

$$\begin{aligned}I^2&=\frac{(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\bar{\alpha}\bar{\beta}+\bar{\beta}\bar{\gamma}+\bar{\gamma}\bar{\alpha})}{(\alpha+\beta+\gamma)(\bar{\alpha}+\bar{\beta}+\bar{\gamma})}\\&=\frac{|\alpha|^2|\beta|^2+|\beta|^2|\gamma|^2+|\gamma|^2|\alpha|^2+\alpha(\bar{\beta}+\bar{\gamma})+\beta(\bar{\gamma}+\bar{\alpha})+\gamma(\bar{\alpha}+\bar{\beta})}{|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2+\alpha(\bar{\beta}+\bar{\gamma})+\beta(\bar{\gamma}+\bar{\alpha})+\gamma(\bar{\alpha}+\bar{\beta})}\\&=\frac{3+\alpha(\bar{\beta}+\bar{\gamma})+\beta(\bar{\gamma}+\bar{\alpha})+\gamma(\bar{\alpha}+\bar{\beta})}{3+\alpha(\bar{\beta}+\bar{\gamma})+\beta(\bar{\gamma}+\bar{\alpha})+\gamma(\bar{\alpha}+\bar{\beta})}\\&=1\end{aligned}$$

$I\geqq 0$ より，$I=1$ である。

(2) (b)

$$\begin{aligned}|\alpha(\beta+1)+\beta(\gamma+1)+\gamma(\alpha+1)|&=|\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma|\\&\leqq|\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha|+|\alpha+\beta+\gamma|\quad(\text{(1) より})\\&=|\alpha+\beta+\gamma|+|\alpha+\beta+\gamma|\qquad(\text{(2)(a) より})\\&=2|\alpha+\beta+\gamma|\end{aligned}$$

したがって，$|\alpha(\beta+1)+\beta(\gamma+1)+\gamma(\alpha+1)|\leqq 2|\alpha+\beta+\gamma|$ が成り立つ。

$\boxed{3}$

(1)　C_1, C_2 に着目して三平方の定理を用いると

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)^2+(x_2-1)^2=\left(1+\frac{1}{4}\right)^2$$

であるから $(x_2-1)^2=1$ である。条件より，$x_2>1$ であるから $x_2=2$ が成り立つ。

(2)　$n \geqq 3$ のとき，C_{n-1}，C_n に着目して三平方の定理を用いると

$$(x_{n-1}-x_n)^2+(r_{n-1}-r_n)^2=(r_n+r_{n-1})^2$$

よって，$(x_{n-1}-x_n)^2=4r_nr_{n-1}$ である。条件より，$x_{n-1}>x_n$ であるから

$$x_{n-1}-x_n=2\sqrt{r_{n-1}r_n} \qquad \cdots ①$$

が成り立つ。

(3)　$n \geqq 3$ とする。C_1 と C_{n-1} に着目して三平方の定理を用いると

$$(x_{n-1}-1)^2+(1-r_{n-1})^2=(1+r_{n-1})^2$$

であるから，$(x_{n-1}-1)^2=4r_{n-1}$ である。C_{n-1} の作り方より $x_{n-1}>1$ であるから，$x_{n-1}=1+2\sqrt{r_{n-1}}$（$n \geqq 3$）が得られる。①に $x_{n-1}=1+2\sqrt{r_{n-1}}$ および $x_n=1+2\sqrt{r_n}$（$n \geqq 3$）を代入すると

$$1+2\sqrt{r_{n-1}}-(1+2\sqrt{r_n})=2\sqrt{r_{n-1}r_n}$$

であるから，$\sqrt{r_{n-1}}-\sqrt{r_n}=\sqrt{r_{n-1}r_n}$ が得られる。

(4)　$n \geqq 3$ とする。$r_{n-1}>0$，$r_n>0$ より，(3) で得られた等式の両辺を $\sqrt{r_{n-1}r_n}$ で割ると

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}-\frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}=1$$

$n \geqq 2$ のとき，$s_n=\sqrt{\dfrac{1}{r_n}}$ とおくと，数列 $\{s_n\}$ は初項 $s_2=\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}=2$，公差 1 の等差数列であるから

$$s_n=2+(n-2)=n$$

よって，$\sqrt{\dfrac{1}{r_n}}=n$ である。したがって，$n \geqq 3$ のときも $r_n=\dfrac{1}{n^2}$ が成り立つ。