令和５年度入試（令和４年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜　後期日程
学部学科等	工学部　工学科電気電子工学・知能情報工学・機械工学コース　都市デザイン学部　都市・交通デザイン学科
教科・科目名	数学／ 数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数A・数B
正解・解答例又は出題（面接）意図	（解答例） 別紙のとおり
備考	

$\boxed{1}$

(1) 半角の公式を用いると、与式は以下の通りとなる。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2} dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

(2) 積和の公式を用いると、与式は以下の通りとなる。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \sin 2x \, dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(x+2x) - \cos(x-2x)\} \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos 3x - \cos x\} \, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin 3x - \sin x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

(3) 与式の被積分関数は積和の公式より、以下の式で表される。

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}\{\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\}$$

ここで、上式中の$\cos(m-n)x$を積分すると$1/(m-n)$が出てくるため、$m=n$と$m \neq n$に分けて考える。

i. $m=n$のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin mx \, dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-\cos 2mx}{2} dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2mx}{4m}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

ii.　$m \neq n$のとき

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = -\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \{\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\}\, dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{m+n}\sin(m+n)x - \frac{1}{m-n}\sin(m-n)x\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

(4) 与式の和の部分を展開すると、以下のように表される。

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{k=1}^{2023} \sin kx\right)^2 dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin 2023x)^2 \, dx$$

被積分関数を展開すると、全ての項は$k \sin mx \sin nx$（kは自然数）と表される。この式の定積分を行うと、(3)から$m \neq n$の項は全て 0 となり、$m = n$の項のみの計算になる。したがって、上式は、以下のようになる。

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x \sin x + \sin 2x \sin 2x + \sin 3x \sin 3x + \cdots + \sin 2023x \sin 2023x)\, dx$$

$$= \underbrace{\pi + \pi + \pi + \cdots + \pi}_{2023\text{個}} = 2023\pi$$

$\boxed{2}$

（1）

△OAB の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\angle BOA=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sqrt{1-\cos^2\angle BOA}$$

$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sqrt{1-\left(\frac{|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2-|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2}{2|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}\right)^2}$$

であるから，数値を代入して $S=66$ である。

（2）

$\angle BOA$ の二等分線と線分 AB の交点を D とする。$AD:DB=|\overrightarrow{OA}|:|\overrightarrow{OB}|$ であるから，

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OA}+\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|}\overrightarrow{AB}=\frac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|}\overrightarrow{OA}+\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|}\overrightarrow{OB}$$

また，同様に $OC:CD=AO:AD=|\overrightarrow{OA}|:\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|}|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|$ なので，

$$\overrightarrow{OC}=\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OA}|+\frac{|\overrightarrow{OA}|}{|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|}|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|}\overrightarrow{OD}=\frac{|\overrightarrow{OB}|\,\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|\,\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{OB}|+|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|}$$

である。数値を代入して，

$$\overrightarrow{OC}=\frac{13}{44}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$$

（3）

点 C を中心とし線分 OA に接する円は △OAB の内接円である。内接円の半径を r とすると，△OAB の面積 S は３つの三角形 △OAC，△ABC，△BOC の和なので，

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|r+\frac{1}{2}|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|r+\frac{1}{2}|\overrightarrow{OB}|r=\frac{1}{2}(11+13+20)\,r=22\,r$$

である。（1）より $S=66$ であるから，$r=3$ である。

（4）

点 P が表す図形は，中心の位置ベクトルが $t\overrightarrow{OC}$ で半径が 6 の円である。この円が線分OAに接するときの接点を E，中心を F とする。また，（3）において，点 C を中心とする円が線分 OA に接するときの接点を G とすると，△OFE と△OCG は相似である。従って，$OC:OF=CG:FE$ の関係が分かる。
$OF=t\,OC$，$CG=3$，$FE=6$ なので，$t=2$ である。

$\boxed{3}$

(1) (a) 題意より $b_{n+1} = 7b_n$ となる。

数列 $\{b_n\}$ は，初項 $b_1 = a_2 - 3a_1 = 8 - 3 \cdot 1 = 5$，公比 7 の等比数列である。求める一般項は

$$b_n = 5 \cdot 7^{n-1} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(b) 題意より

$$\begin{aligned} a_{n+2} - 7a_{n+1} &= 3(a_{n+1} - 7a_n) \\ c_{n+1} &= 3c_n \end{aligned}$$

数列 $\{c_n\}$ は，初項 $c_1 = a_2 - 7a_1 = 8 - 7 \cdot 1 = 1$，公比 3 の等比数列である。求める一般項は

$$c_n = 3^{n-1} \ (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

(c) 先の (a) と (b) の結果から，両辺をそれぞれ引くと

$$\begin{aligned} b_n - c_n &= 5 \cdot 7^{n-1} - 3^{n-1} \\ (a_{n+1} - 3a_n) - (a_{n+1} - 7a_n) &= 5 \cdot 7^{n-1} - 3^{n-1} \\ 4a_n &= 5 \cdot 7^{n-1} - 3^{n-1} \\ a_n &= \frac{1}{4}\left(5 \cdot 7^{n-1} - 3^{n-1}\right) \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

(2) (a) 題意より，数列 $\{a_{n+1} - 5a_n\}$ は，初項 $a_2 - 5a_1 = 8 - 5 \cdot 1 = 3$，公比 5 の等比数列である。ゆえに

$$a_{n+1} - 5a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$$

両辺を 5^{n+1} で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{5^{n+1}} - \frac{a_n}{5^n} = \frac{3}{25}$$

ここで $d_n = \dfrac{a_n}{5^n}$ より

$$d_{n+1} - d_n = \frac{3}{25}$$

(b) 先の (a) の結果から，数列 $\{d_n\}$ は，初項 $d_1 = \dfrac{a_1}{5} = \dfrac{1}{5}$，公差 $\dfrac{3}{25}$ の等差数列である。ゆえに

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{5} + \frac{3}{25}(n-1) \\ \frac{a_n}{5^n} &= \frac{1}{25}\{5 + 3(n-1)\} \\ &= \frac{1}{5^2}(3n+2) \\ a_n &= (3n+2) \cdot 5^{n-2} \ (n = 1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$