令和４年度入試（令和３年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜（前期日程）
学部学科等	理学部数学科・医学部・薬学部
教科・科目名	数学／ 数学（理数・医・薬）
	（解答例） 別紙に略解を示す。
備　　考	

理学部数学科・医学部・薬学部

$\boxed{1}$ (1) n を自然数とする。次のことを数学的帰納法で示す。

$$4^{3n-2}-1=9p_n+3 \text{ となる非負の整数 } p_n \text{ が存在する} \qquad (*)$$

[1] $n=1$ のとき。

$$4^{3n-2}-1=9\cdot 0+3$$

となる。よって, $n=1$ のとき $p_1=0$ で $(*)$ は成立する。

[2] k を自然数として, $n=k$ のとき $(*)$ が成立すると仮定する。$n=k+1$ のとき,

$$\begin{aligned}4^{3(k+1)-2}-1&=4^{3k-2+3}-1\\&=4^3(4^{3k-2}-1)+4^3-1\\&=4^3(9p_k+3)+4^3-1\\&=9\cdot 64p_k+255\\&=9(64p_k+28)+3\end{aligned}$$

となる。よって, $n=k+1$ のとき $p_{k+1}=64p_k+28$ として p_{k+1} は非負の整数であり $(*)$ は成立する。

[1], [2] より, 数学的帰納法から, すべての自然数 n に対して, 非負の整数 p_n が存在して, $4^{3n-2}-1=9p_n+3$ とかけることが証明された。従って, 自然数 n に対して, $4^{3n-2}-1$ を 9 で割ると 3 余ることが示された。

(2) 自然数 n を 5 で割ったときの商を p, 余りを q とおくと, $n=5p+q$ とかけて $0\leqq q\leqq 4$ である。

$$\begin{aligned}&n^3+3n^2+2n-3\\&=(5p+q)^3+3(5p+q)^2+2(5p+q)-3\\&=5(25p^3+15p^2q+3pq^2+15p^2+6pq+2p)+q^3+3q^2+2q-3\end{aligned}$$

となる。$25p^3+15p^2q+3pq^2+15p^2+6pq+2p$ は非負の整数より, n^3+3n^2+2n-3 が 5 の倍数でないことを示すには, q^3+3q^2+2q-3 が $0\leqq q\leqq 4$ なるすべての整数 q に対して 5 の倍数でないことを示せばよい。$f(q)=q^3+3q^2+2q-3$ とおく。

$$\begin{aligned}f(0)&=-3\\f(1)&=3\\f(2)&=21\\f(3)&=57\\f(4)&=117\end{aligned}$$

であり, これらはすべて 5 の倍数でない。よって, 自然数 n に対して, n^3+3n^2+2n-3 は 5 の倍数でないことが示された。

理学部数学科・医学部・薬学部

$\boxed{2}$ (1) $I_1=\pi+2,\ I_2=\dfrac{\pi}{8}(\pi+2)$。

(2) $n \geqq 3$ として,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^{n-1}x\,(-\cos x)'\,dx \\
&= \frac{1}{n}\Big[(1+x)\sin^{n-1}x\,(-\cos x)\Big]_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\left\{(1+x)\sin^{n-1}x\right\}'\cos x\,dx \\
&= \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\cos x\,dx + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^{n-2}x\cos^2 x\,dx \\
&= \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\sin^n x\right]_0^{\pi} + \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)\,dx \\
&= \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^{n-2}x\,dx - \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^n x\,dx \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{n}I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

となる。これを整理して, $n^2 I_n=(n-1)(n-2)I_{n-2}$ を得る。

(2)[別解] $n \geqq 1$ として, $x=\pi-t$ とおくと

$$I_n=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^n x\,dx=\frac{1}{n}\int_{\pi}^{0}(1+\pi-t)\sin^n t\,(-1)\,dt=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}(1+\pi-t)\sin^n t\,dt$$

となる。これより,

$$2I_n=\frac{1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^n x\,dx+\frac{1}{n}\int_0^{\pi}(1+\pi-x)\sin^n x\,dx=\frac{\pi+2}{n}\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx$$

を得る。従って,

$$I_n=\frac{\pi+2}{2n}\int_0^{\pi}\sin^n x\,dx \quad (n \geqq 1)$$

である。これより, $n \geqq 3$ のとき,

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{\pi+2}{2n}\int_0^{\pi}\sin^{n-1}x\,(-\cos x)'\,dx \\
&= \frac{\pi+2}{2n}\left\{\Big[\sin^{n-1}x\,(-\cos x)\Big]_0^{\pi} + (n-1)\int_0^{\pi}\sin^{n-2}x\,\cos^2 x\,dx\right\} \\
&= \frac{n-1}{2n}(\pi+2)\left\{\int_0^{\pi}\sin^{n-2}x\,dx - \int_0^{\pi}\sin^n x\,dx\right\} \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{n}I_{n-2} - (n-1)I_n
\end{aligned}$$

となる。これを整理して, $n^2 I_n=(n-1)(n-2)I_{n-2}$ を得る。

(3) $n \geqq 3$ として, (2) より $n^2 I_n=(n-1)(n-2)I_{n-2}$ である。この両辺に $(n-1)I_{n-1}$ をかけると

$$n^2(n-1)I_{n-1}I_n=(n-1)^2(n-2)I_{n-2}I_{n-1}$$

となる。

いま, $n \geqq 2$ に対して, $J_n = n^2(n-1)I_{n-1}I_n$ とおくと, $n \geqq 3$ に対して $J_n = J_{n-1}$ となる。これは, $n \geqq 2$ のとき, J_n が n によらず一定であることを示している。従って, (1) を使って, $n \geqq 2$ のとき,

$$J_n = J_2 = 2^2 \cdot 1 \cdot I_1 I_2 = \frac{\pi}{2}(\pi+2)^2$$

これより, $n \geqq 2$ のとき,

$$I_{n-1}I_n = \frac{\pi(\pi+2)^2}{2n^2(n-1)}$$

を得る。

(4) $0 \leqq x \leqq \pi$ において, $1+x>0$ かつ $0 \leqq \sin x \leqq 1$ であり, $\sin x$ は常に 0 にも 1 にもならない。従って, $n \geqq 2$ のとき,

$$\begin{aligned} 0 < I_n &= \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^n x\,dx \\ &= \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^{n-1} x \sin x\,dx \\ &< \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^{n-1} x\,dx \\ &< \frac{1}{n-1}\int_0^{\pi}(1+x)\sin^{n-1} x\,dx \\ &= I_{n-1} \end{aligned}$$

となり, $I_n < I_{n-1}$ を得る。

(5) $n \geqq 2$ とする。(4) より $I_{n+1} < I_n < I_{n-1}$ である。辺々に $n^3 I_n (>0)$ をかけて, $n^3 I_n I_{n+1} < n^3 I_n^2 < n^3 I_{n-1} I_n$ である。(3) より,

$$\frac{n^2}{(n+1)^2}\frac{\pi(\pi+2)^2}{2} < n^3 I_n^2 < \frac{n}{n-1}\frac{\pi(\pi+2)^2}{2}$$

となる。この式で $n \to \infty$ として, はさみうちの原理より,

$$\lim_{n\to\infty} n^3 I_n^2 = \frac{\pi(\pi+2)^2}{2}$$

を得る。

理学部数学科・医学部・薬学部

$\boxed{3}$　(1)　$f(x)$ を微分して

$$f'(x)=\frac{1\cdot(x^2+3a^2)-(x+a)\cdot 2x}{(x^2+3a^2)^2}=-\frac{(x+3a)(x-a)}{(x^2+3a^2)^2}$$

を得る。これより, $f(x)$ の増減表は

x	$\cdots\cdots$	$-3a$	$\cdots\cdots$	a	$\cdots\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$-\frac{1}{6a}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2a}$	$\searrow$

となる。$f(x)$ の定義と増減表より,

$$\begin{aligned} &f(-3a)<f(x)<0 && (x<-3a)\\ &f(-3a)<f(x)<f(a) && (-3a<x<a)\\ &0<f(x)<f(a) && (a<x) \end{aligned}$$

を得る。これより, $f(x)$ の最大値は $\dfrac{1}{2a}$ で, それを与える x の値は a のみである。また, $f(x)$ の最小値は $-\dfrac{1}{6a}$ で, それを与える x の値は $-3a$ のみである
($x\geqq a$ で $f(x)$ は単調に減少して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ であり, $x\leqq -3a$ で $f(x)$ は単調に減少して $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ であることを考慮しても, 増減表より最大値と最小値の結果を得ることはできる)。
(2)　$y=f(x),\ z=f(y)=f(f(x))$ とおく。(1) より, y の取り得る値の範囲は

$$-\frac{1}{6a}\leqq y\leqq\frac{1}{2a}$$

である (実際は, 中間値の定理より, y は $-\frac{1}{6a}$ と $\frac{1}{2a}$ の間のすべての値を取る)。一方, $f(y)=0$ の解は $y=-a$ なので, $z=f(f(x))=0$ が実数解を持つのは

$$-\frac{1}{6a}\leqq -a\leqq\frac{1}{2a}$$

のときで, かつ, そのときに限る。このとき, 中間値の定理より $f(x_0)=-a$ となる実数 x_0 が存在する。上の不等式を解いて, $a>0$ を考慮すれば, 求める a の範囲は

$$a\leqq\frac{\sqrt{6}}{6}$$

となる。
(3)　$y=f(x),\ z=f(y)=f(f(x))$ とおくと求める最大値と最小値はそれぞれ, $-\dfrac{1}{6a}\leqq y\leqq\dfrac{1}{2a}$ における $f(y)$ の最大値と最小値である。

まず, $f(x)$ の定義より, $x\leqq -a$ で $f(x)\leqq 0$ であり, $x>-a$ で $f(x)>0$ である。(2) より $a\leqq\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ なので, これより $-\dfrac{1}{6a}\leqq -a$ かつ $a<\dfrac{1}{2a}$ となる。よって, $f\Big(-\dfrac{1}{6a}\Big)\leqq 0$ となり, (1) の増減表より $f(a)>f\Big(\dfrac{1}{2a}\Big)>0$ となる。

これらを用いて, $z=f(y)\ \Big(-\dfrac{1}{6a}\leqq y\leqq\dfrac{1}{2a}\Big)$ の増減を調べる。

(i)　$-\dfrac{1}{6a}<-3a$ (すなわち, $0<a<\dfrac{\sqrt{2}}{6}$) のとき, 次の増減表を得る。

y	$-\frac{1}{6a}$	……	$-3a$	……	a	……	$\frac{1}{2a}$
$f'(y)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(y)$	$f\left(-\frac{1}{6a}\right)$	$\searrow$	$f(-3a)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{2a}\right)$

このとき,

$$f(-3a) < f\left(-\frac{1}{6a}\right) \leqq 0 < f\left(\frac{1}{2a}\right) < f(a)$$

である (実は, このとき, $-\dfrac{1}{6a} < -3a < -a$ より $f\left(-\dfrac{1}{6a}\right) < 0$ である)。

(ii) $-\dfrac{1}{6a} \geqq -3a$ (すなわち, $\dfrac{\sqrt{2}}{6} \leqq a \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{6}$) のとき, 次の増減表を得る。

y	$-\frac{1}{6a}$	……	a	……	$\frac{1}{2a}$
$f'(y)$		$+$	0	$-$	
$f(y)$	$f\left(-\frac{1}{6a}\right)$	$\nearrow$	$f(a)$	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{2a}\right)$

このとき,

$$f\left(-\frac{1}{6a}\right) \leqq 0 < f\left(\frac{1}{2a}\right) < f(a)$$

である。

以上より, $z = f(y) = f(f(x))$ の最大値は $0 < a \leqq \dfrac{\sqrt{6}}{6}$ のとき $f(a) = \dfrac{1}{2a}$ であり, $z = f(y) = f(f(x))$ の最小値は

$$0 < a < \frac{\sqrt{2}}{6} \text{ のとき } f(-3a) = -\frac{1}{6a}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{6} \leqq a \leqq \frac{\sqrt{6}}{6} \text{ のとき } f\left(-\frac{1}{6a}\right) = \frac{6a(6a^2-1)}{1+108a^4}$$

である。

[注意] (3) で, $y = f(x_1) = a$ となる実数 x_1 が存在するのは中間値の定理による。また, $0 < a < \dfrac{\sqrt{2}}{6}$ のとき $y = f(x_2) = -3a$ となる実数 x_2 が存在するのも中間値の定理による。