令和４年度入試（令和３年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜（追試験）
学部学科等	理・医・工・都市デザイン学部
教科・科目名	数学／ 数学(理・医・工・都市デ)
正解・解答例 又は出題 （面接）意図	（解答例） 別紙に略解を示す。
備　考	

理学部・医学部・薬学部・工学部・都市デザイン学部

$\boxed{1}$ (1) 領域 D は 3 点 $A\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right), B(2,3), C(4,1)$ を頂点とする三角形の内部および周である。そこで，領域 D の点 $P(x,y)$ に対して，

$$k = x^2 + y^2 - 6y + 9$$

とおくと，$k = x^2 + (y-3)^2$ となり，$k \geqq 0$ である。k は，2 点 $E(0,3)$, $P(x,y)$ 間の距離の 2 乗である。

点 $P(x,y)$ が領域 D を動くとき k が最大になるのは，点 P が点 C のときで，そのとき

$$k = 4^2 + (1-3)^2 = 20$$

である。次に，点 $P(x,y)$ が領域 D を動くとき k の最小値を考える。点 E を通り直線 AB に直交する直線の方程式は

$$y = -x + 3$$

で，この直線は線分 AB と点 $F(1,2)$ で交わる。従って，点 $P(x,y)$ が領域 D を動くとき k が最小になるのは，点 P が点 F のときで，そのとき

$$k = 1^2 + (2-3)^2 = 2$$

である。

以上より，求める最大値は 20 であり，求める最小値は 2 である。

(2) 題意を満たす実数 a, b, c に対して，$x = 2^b$ とおく。このとき，

$$2^a = 2 - 2^b = 2 - x$$
$$2^c = 1 - 2^b = 1 - x$$

である。$2^a > 0$ かつ $2^b > 0$ かつ $2^c > 0$ より，$0 < x < 1$ である。

いま，$2^{a+b+c} = x(2-x)(1-x)$ より，

$$f(x) = x(2-x)(1-x) \quad (0 < x < 1)$$

とおいて，まず $f(x)$ の最大値を求める。$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ より，次の増減表を得る。

x	0	……	$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$	……	1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	$\searrow$	

よって，$x = \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ のとき，$f(x)$ は最大になり，その最大値は

$$f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

である。以上より，$a+b+c$ の最大値は

$$\log_2\left(\frac{2}{9}\sqrt{3}\right) = 1 - \frac{3}{2}\log_2 3$$

である。

理学部・医学部・薬学部・工学部・都市デザイン学部

$\boxed{2}$ (1) $\dfrac{156}{N}$ が自然数となる自然数 N は 156 の正の約数である。

$$156 = 2^2 \times 3^1 \times 13^1$$

より, 求める個数は

$$(2+1) \times (1+1) \times (1+1) = 12$$

である。

(2) a_k は, 156×10^k の正の約数の個数に等しい。

(a) $156 \times 10^1 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 13^1$ より,

$$a_1 = (3+1) \times (1+1) \times (1+1) \times (1+1) = 32$$

よって, $a_1 = 32$ である。

(b) $156 \times 10^k = 2^{k+2} \times 3^1 \times 5^k \times 13^1$ より,

$$a_k = (k+2+1) \times (1+1) \times (k+1) \times (1+1) = 4(k+1)(k+3)$$

よって, $a_k = 4(k+1)(k+3)$ である。

(c)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{22} \frac{1}{a_k} &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{22} \frac{1}{(k+1)(k+3)} \\
&= \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{22} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \right) \\
&= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{24} - \frac{1}{25} \right) \\
&= \frac{451}{4800}
\end{aligned}$$

である。

$\boxed{3}$ (1)

$$y = \frac{1}{12 - x^2}$$

とする。このとき,

$$y' = \frac{2x}{(12-x^2)^2}, \quad y'' = \frac{6(x^2+4)}{(12-x^2)^3}$$

より, y の増減, グラフの凹凸は, 次の表のようになる。

x	$\cdots$	$-2\sqrt{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$2\sqrt{3}$	$\cdots$
y'	$-$	／	$-$	0	$+$	／	$+$
y''	$-$	／	$+$	$+$	$+$	／	$-$
y	↘	／	↘	$\frac{1}{12}$	↗	／	↗

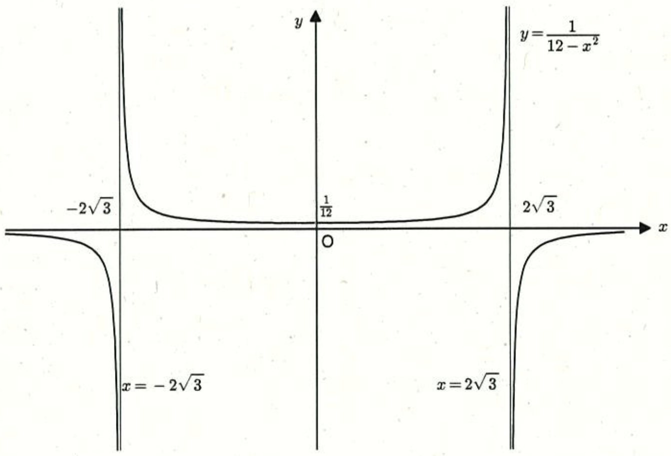
$f(x) = \dfrac{1}{12-x^2}$ とすると, この関数は $f(-x) = f(x)$ を満たしているから, グラフは y 軸に関して対称である。さらに,

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to \infty} y = 0$$

に注意すると, 直線 $y = 0$ はこの関数で定義される曲線の漸近線であることが分かる。また,

$$\lim_{x \to -2\sqrt{3}-0} y = -\infty, \quad \lim_{x \to -2\sqrt{3}+0} y = \infty$$
$$\lim_{x \to 2\sqrt{3}-0} y = \infty, \quad \lim_{x \to 2\sqrt{3}+0} y = -\infty$$

から, 直線 $x = -2\sqrt{3}$ および $x = 2\sqrt{3}$ もこの関数で定義される曲線の漸近線である。さらに, この関数は, $x = 0$ で極小値 $\dfrac{1}{12}$ を取る。以上により, グラフの概形は以下の図のようになる。



(2)

$$y = \frac{1}{4 + x^2}$$

とする。このとき,

$$y' = -\frac{2x}{(4+x^2)^2}$$

より, 次の増減表を得る。

x	$\cdots\cdots$	0	$\cdots\cdots$
y'	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$

$g(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$ とすると, この関数は $g(-x) = g(x)$ を満たしているから, グラフは y 軸に関して対称である。また,

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to\infty} y = 0$$

に注意すると, 直線 $y = 0$ はこの関数で定義される曲線の漸近線であることが分かる。さらに, $y = \dfrac{1}{12-x^2}$ と $y = \dfrac{1}{4+x^2}$ の交点の x 座標は $x = 2$ および $x = -2$ であることが分かる。

以上より, 求める面積を S とおくと,

$$S = \int_{-2}^{2} \left(\frac{1}{4+x^2} - \frac{1}{12-x^2} \right) dx$$

である。ここで,

$$I = 2\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx, \quad J = 2\int_0^2 \frac{1}{12-x^2}\,dx$$

とおくと, $S = I - J$ である。I において, $x = 2\tan\theta$ とおくと,

$$I = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{4(1+\tan^2\theta)} \frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,d\theta = \frac{\pi}{4}$$

となる。一方,

$$\begin{aligned}
J &= 2\int_0^2 \frac{1}{(2\sqrt{3}+x)(2\sqrt{3}-x)}\,dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{3}+x} + \frac{1}{2\sqrt{3}-x} \right) dx \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \Big[\log|2\sqrt{3}+x| - \log|2\sqrt{3}-x| \Big]_0^2 \\
&= \frac{\sqrt{3}}{6} \log(2+\sqrt{3})
\end{aligned}$$

となる。以上より,

$$S = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}\log(2+\sqrt{3})$$

である。