令和４年度入試（令和３年度実施）の情報開示
解答例について

入試の区分	一般選抜
学部学科等	工学部　工学科電気電子工学・知能情報工学・機械工学コース　都市デザイン学部　都市・交通デザイン学科
教科・科目名	数学／ 数Ⅰ・数Ⅱ・数Ⅲ・数Ａ・数Ｂ
正解・解答例又は出題（面接）意図	（解答例） 別紙のとおり
備考	

1

(1) $t = \sin\theta + \cos\theta$

$t^2 = (\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$ であるから、

$\sin\theta\cos\theta = \dfrac{t^2 - 1}{2}$

(2) まず、$\sin^3\theta + \cos^3\theta$を t を用いて表す。

$t^3 = (\sin\theta + \cos\theta)^3 = \sin^3\theta + 3\sin^2\theta\cos\theta + 3\sin\theta\cos^2\theta + \cos^3\theta$

$= \sin^3\theta + \cos^3\theta + 3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta + \cos\theta)$であるから、

$t^3 = \sin^3\theta + \cos^3\theta + 3\frac{t^2-1}{2}t$ となり、

$\sin^3\theta + \cos^3\theta = t^3 - \dfrac{3}{2}t^3 + \dfrac{3}{2}t = -\dfrac{1}{2}t^3 + \dfrac{3}{2}t$

$f_{(\theta)} = 2\cos^3\theta - 2\sin\theta(1 - \sin^2\theta) - 6\sin\theta\cos\theta - 3\cos\theta - \sin\theta + 3$

$= 2\cos^3\theta + 2\sin^3\theta - 6\sin\theta\cos\theta - 3\cos\theta - 3\sin\theta + 3$

$= 2\left(-\dfrac{1}{2}t^3 + \dfrac{3}{2}t\right) - 6\left(\dfrac{t^2 - 1}{2}\right) - 3t + 3$

$= -t^3 + 3t - 3t^2 + 3 - 3t + 3 = -t^3 - 3t^2 + 6$

(3) 三角関数の合成を用いると $t = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$ となる。

$\frac{\pi}{4} \leqq \theta + \frac{\pi}{4} \leqq \frac{5\pi}{4}$ であるので、

$$-1 \leqq \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}$$

(4) $g_{(t)} = -t^3 - 3t^2 + 6$ とおくと、

$g'_{(t)} = -3t^2 - 6t = -3t(t + 2)$

$g_{(t)}$の増減表は、以下の通りとなる。

t	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$g'_{(t)}$	0	$+$	3	$+$	0	$-$	$-6-6\sqrt{2}$
$g_{(t)}$	2	↗	4	↗	6	↘	$-2\sqrt{2}$

この増減表と、$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ の条件から最大値は 6，最小値は $-2\sqrt{2}$

$\boxed{2}$

(1) 内積の定義から

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle\mathrm{AOB} = \cos\theta$$

なお，同様にして $\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = \cos\theta$ である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表現する。

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{DE}} &= \overrightarrow{\mathrm{DO}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}} = -\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}} = -s\vec{a} + t\vec{b} \\
\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= (1-s)\vec{a} + s\vec{b}
\end{aligned}$$

内積は

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} &= \left\{-s\vec{a} + t\vec{b}\right\}\cdot\left\{(1-s)\vec{a} + s\vec{b}\right\} \\
&= -s(1-s)\vec{a}\cdot\vec{a} - s^2\vec{a}\cdot\vec{b} + (1-s)t\vec{b}\cdot\vec{a} + st\vec{b}\cdot\vec{b} \\
&= -s(1-s)|\vec{a}|^2 + \left\{-s^2 + (1-s)t\right\}\vec{a}\cdot\vec{b} + st|\vec{b}|^2 \\
&= -s(1-s) + \left\{-s^2 + (1-s)t\right\}\cos\theta + st
\end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}} = 0$ であれば良いので

$$\begin{aligned}
-s(1-s) + \left\{-s^2 + (1-s)t\right\}\cos\theta + st &= 0 \\
-s(1-s) - s^2\cos\theta + t\cos\theta - st\cos\theta + st &= 0 \\
(\cos\theta - s\cos\theta + s)\,t &= s(1-s) + s^2\cos\theta \\
t &= \frac{s(1-s) + s^2\cos\theta}{\cos\theta - s\cos\theta + s}
\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}$，$\overrightarrow{\mathrm{FD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表現する。

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{DE}} &= \overrightarrow{\mathrm{DO}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + \overrightarrow{\mathrm{OE}} = -s\vec{a} + t\vec{b} \\
\overrightarrow{\mathrm{EF}} &= \overrightarrow{\mathrm{EO}} + \overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} + \overrightarrow{\mathrm{OF}} = -t\vec{b} + u\vec{c} \\
\overrightarrow{\mathrm{FD}} &= \overrightarrow{\mathrm{FO}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{\mathrm{OF}} + \overrightarrow{\mathrm{OD}} = -u\vec{c} + s\vec{a}
\end{aligned}$$

長さの 2 乗を求めるために

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2 &= \left|-s\vec{a} + t\vec{b}\right|^2 = \left(-s\vec{a} + t\vec{b}\right)\cdot\left(-s\vec{a} + t\vec{b}\right) \\
&= s^2\vec{a}\cdot\vec{a} - st\vec{a}\cdot\vec{b} - st\vec{b}\cdot\vec{a} + t^2\vec{b}\cdot\vec{b} = s^2|\vec{a}|^2 - 2st\vec{a}\cdot\vec{b} + t^2|\vec{b}|^2 \\
&= s^2 - 2st\cos\theta + t^2
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{EF}}|^2 &= t^2 - 2tu\cos\theta + u^2 \\
|\overrightarrow{\mathrm{FD}}|^2 &= u^2 - 2us\cos\theta + s^2
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{EF}}|^2 + |\overrightarrow{\mathrm{FD}}|^2 &= \left(s^2 - 2st\cos\theta + t^2\right) + \left(t^2 - 2tu\cos\theta + u^2\right) + \left(u^2 - 2us\cos\theta + s^2\right) \\
&= 2\left(s^2 + t^2 + u^2\right) - 2\left(st + tu + us\right)\cos\theta
\end{aligned}$$

ここで，$(st+tu+us)$ を求めるために，以下に気が付く。

$$
\begin{aligned}
(s+t+u)^2 &= \left(s^2+t^2+u^2\right)+2\,(st+tu+us) \\
\left(\frac{5}{6}\right)^2 &= \frac{7}{18}+2\,(st+tu+us) \\
st+tu+us &= \frac{1}{2}\left(\frac{25}{36}-\frac{7}{18}\right)=\frac{11}{72}
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{EF}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{FD}}|^2 &= 2\frac{7}{18}-2\frac{11}{72}\cos\theta \\
&= \frac{7}{9}-\frac{11}{36}\cos\theta
\end{aligned}
$$

3

(1) 全部で$_{10}C_3=\dfrac{10\times9\times8}{3\times2\times1}=120$通り

最大値が5となるのは，

$(\text{特定の数値5: 1通り})\times(\text{4以下から2つ})=1\times{}_4C_2=1\times\dfrac{4\times3}{2\times1}=6$通り

よって，答え：$\dfrac{\text{事象の数}}{\text{全体の数}}=\dfrac{6}{120}=\dfrac{1}{20}$

(2)

最大値が5以下となるのは，$_5C_3=\dfrac{5\times4\times3}{3\times2\times1}=10$通り，T=2 で10通り×10通り=100通り

最大値が4以下となるのは，$_4C_3=\dfrac{4\times3\times2}{3\times2\times1}=4$通り，T=2 で4通り×4通り=16通り

T=2 で最大値が5となる事象：100通り−16通り=84通り

よって，答え：$\dfrac{\text{事象の数}}{\text{全体の数}}=\dfrac{84}{120\times120}=\dfrac{7}{1200}$

(3)

全部で$_nC_3=\dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3\times2\times1}$通り

・連続する数が$1,2$もしくは$n-1,n$の場合

$(\text{上記の2通り})\times(\text{連続しない事象の数})=2\times(n-3)$ ・・・①

・連続する数が$1,2$もしくは$n-1,n$以外の場合

$(\text{連続する2つの数の事象})\times(\text{連続しない事象の数})=(n-3)\times(n-4)$ ・・・②

よって，求める確率は$\dfrac{\text{事象の数}}{\text{全体の数}}=\dfrac{①+②}{_nC_3}=\dfrac{6\times(2(n-3)+(n-3)(n-4))}{n(n-1)(n-2)}=\dfrac{6(n-3)}{n(n-1)}$

(4)

全部で$_nC_3=\dfrac{n\times(n-1)\times(n-2)}{3\times2\times1}$通り

$(\text{一致の事象の数})\times(\text{一致しない2個の事象の数})=3\times{}_{n-3}C_2=3\times\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}$ ・・③

よって，求める確率は$\dfrac{\text{事象の数}}{\text{全体の数}}=\dfrac{③}{_nC_3}=\dfrac{6\times3\times(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)\times2}=\dfrac{9(n-3)(n-4)}{n(n-1)(n-2)}$